关于绝对值最值的数学期望问题的几种证法与思考

文/王瑞瑞　李金伟　苑倩倩　李彩娟

摘要： 针对一道概率论中关于服从二维正态分布的随机变量函数——绝对值的最小值的数学期望的证明题，分析并给出四种不同的证明方法，指出各种证明方法的关键和在最大值问题中的推广，从而充分发挥“一题多解”在日常教学中的作用，激发学生的学习积极性，培养学生的创造性思维能力和发散性思维能力，同时更好地践行课程思政的理念。

关键词： 二维正态分布；数学期望；绝对值；最小值；最大值

关于数学期望的研究一直是概率论教学中的一个重点，如王瑞瑞、李金伟的“负二项分布数学期望与方差的一种求法”，王瑞瑞等人的“最大值与最小值的数学期望的几种求法”，罗建波的“二维随机变量最小值的数学期望的研究”等，但是关于多维随机变量绝对值最值的数学期望问题涉及文献较少。故本文对概率论中一道多维随机变量绝对值最小值的数学期望的证明题，采用“一题多解”的方法进行分析，作为这些方法的应用，将结论推广到绝对值最大值的数学期望问题中得到定理3。

一、预备知识

下面给出随机变量函数的数学期望的定理。

定理1：若随机变量 X 的分布列为 $p(x_i)$ 或密度函数为 $p(x)$，则 X 的某一函数 $g(X)$ 的数学期望为 $E[g(X)]=\sum_i g(x_i)p(x_i)$ 或 $E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)p(x)\mathrm{d}x$ 。

定理2：若二维随机变量 (X,Y) 的联合分布列为 $p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$ 或联合密度函数为 $p(x,y)$，则 $Z=g(X,Y)$ 的数学期望为：

$$E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}\text{或}E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ 。

二、绝对值最值的数学期望的几种证法

例：设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0)$，证明 $E\left[\min\left(|X|,|Y|\right)\right]=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}}\sigma$ 。

证法1：因 $(X,Y)\sim N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0)$，故 $p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}},x\in R,y\in R$，

若 $|x|\ge|y|$，则 $\min\left(|x|,|y|\right)=|y|$；若 $|x|<|y|$，则 $\min\left(|x|,|y|\right)=|x|$。由定理2可得，

$$E\left[\min\left(|X|,|Y|\right)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min(|x|,|y|)p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min(|x|,|y|)\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{-|y|}|y|\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x+\int_{|y|}^{+\infty}|y|\frac{1}{2\pi\sigma^2}\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x+\int_{-|y|}^{|y|}|x|\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{-|y|}|y|\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x+\int_{|y|}^{+\infty}|y|\frac{1}{2\pi\sigma^2}\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x+\int_{-|y|}^{|y|}|x|\frac{1}{2\pi\sigma^2}\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\left[|y|\left(\int_{-\infty}^{-|y|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x+\int_{|y|}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\right)+\int_{-|y|}^{|y|}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[|y|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\left(\Phi\left(-\frac{|y|}{\sigma}\right)+1-\Phi\left(\frac{|y|}{\sigma}\right)\right)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}2\int_0^{|y|}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=2\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\left(1-\Phi\left(\frac{|y|}{\sigma}\right)\right)\mathrm{d}y-\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\left[e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]\Big|_0^{|y|}\mathrm{d}y$$

$$= 4\int_0^{+\infty} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\left(1-\Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right)\mathrm{d}y - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\left(e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}-1\right)\mathrm{d}y$$

$$= 4\int_0^{+\infty} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y - 4\int_0^{+\infty} y\Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y$$

$$-\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\sqrt{2}y)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}(\sqrt{2}y) + \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{4\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty} + \frac{4\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}\Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\mathrm{d}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1 + \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot 1$$

$$= \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} + \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} + \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[\Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right)e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]$$

$$= \frac{6\sigma}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} + \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{2} - \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{2y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y\right]$$

$$= \frac{6\sigma}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} - \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\sqrt{2}y)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}(\sqrt{2}y)$$

$$= \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} - \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} = \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}} - \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} = \frac{2(\sqrt{2}-1)\sigma}{\sqrt{\pi}}。$$

证法2：因 $(X,Y)\sim N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0)$，故 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$Y\sim N(0,\sigma^2)$，且 X 与 Y 相互独立，从而 $|X|$ 与 $|Y|$ 也相互独立且同分布。下面求其共同的分布，记 $U=|X|$，则显然 U 在 $[0,+\infty)$ 上取值，故当 $u<0$ 时，$F_U(u)=0$；当 $u\ge 0$ 时，

$$F_U(u)=P(U\le u)=P(|X|\le u)=P(-u\le X\le u)=2\Phi\left(\frac{u}{\sigma}\right)-1,$$

从而 $U=|X|$ 的密度函数为 $p_U(u)=F_U'(u)=2\varphi\left(\frac{u}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$，$u>0$。由最小值的密度函数公式 $p_1(z)=n[1-F(z)]^{n-1}p(z)$，可得最小值 $Z=\min(|X|,|Y|)$ 的密度函数

$$p_Z(z)=4\left[1-\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)\right]\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}},\quad z>0。$$

由定理1可知

$$E\left[\min(|X|,|Y|)\right]=E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}z\cdot p_Z(z)\mathrm{d}z=\int_0^{+\infty}z\cdot 4\left[1-\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)\right]\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z$$

$$=4\int_0^{+\infty}z\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z-4\int_0^{+\infty}z\cdot\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{8\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}+\frac{8\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)\cdot e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)\right]$$

$$=\frac{8\sigma}{\sqrt{2\pi}}+\frac{8\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{2}-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\cdot\varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right)\cdot\frac{1}{\sigma}\mathrm{d}z\right]=\frac{8\sigma}{\sqrt{2\pi}}-\frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}-\frac{8\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{2z^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}-\frac{8\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\sqrt{2}z)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}(\sqrt{2}z)\right]=\frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}-\frac{8\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}-\frac{2\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{2\pi}}=\frac{(4-2\sqrt{2})\sigma}{\sqrt{2\pi}}=\frac{2(\sqrt{2}-1)\sigma}{\sqrt{\pi}}。$$

证法3：由于 $\min(|X|,|Y|)=\frac{|X|+|Y|-\big||X|-|Y|\big|}{2}$，故 $E\left[\min(|X|,|Y|)\right]=E\left[\frac{|X|+|Y|-\big||X|-|Y|\big|}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[E|X|+E|Y|-E\big||X|-|Y|\big|\right]$。

因为 $(X,Y)\sim N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0)$，故 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$Y\sim N(0,\sigma^2)$，且 X 与 Y 独立，从而

$$E|Y|=E|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=-\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma。$$

下面求 $E\big||X|-|Y|\big|$，由定理2可直接根据 $(|X|,|Y|)$ 的联合密度函数求解该数学期望。不妨记 $U=|X|$，$V=|Y|$，由于 X 与 Y 独立同分布，故 U 与 V 独立同分布，其共同的密度函数为 $p_U(u)=F_U'(u)=2\varphi\left(\frac{u}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$，$u>0$。从而 $(|X|,|Y|)=(U,V)$ 的密度函数为 $p(u,v)=p_U(u)p_V(v)=\frac{4}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}$，$u>0$，$v>0$。得

$$E\big||X|-|Y|\big|=E|U-V|=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|u-v|\,p(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}|u-v|\cdot\frac{4}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{+\infty}\left[\int_v^{+\infty}(u-v)\cdot\frac{4}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u+\int_0^{v}(v-u)\cdot\frac{4}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_v^{+\infty}u\cdot\frac{4}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v-\int_0^{+\infty}\int_v^{+\infty}v\cdot\frac{4}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\int_0^{+\infty}\int_0^{v}v\cdot\frac{4}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v-\int_0^{+\infty}\int_0^{v}u\cdot\frac{4}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\left[\int_v^{+\infty}u\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v-\int_0^{+\infty}v\frac{4}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\left[\int_v^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v+\int_0^{+\infty}v\frac{4}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\left[\int_0^{v}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v-\int_0^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\left[\int_0^{v}u\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\cdot\left[\frac{-2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_v^{+\infty}\right]\mathrm{d}v-\int_0^{+\infty}v\frac{4}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\left[1-\Phi\left(\frac{v}{\sigma}\right)\right]\mathrm{d}v+\int_0^{+\infty}v\frac{4}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\left[\Phi\left(\frac{v}{\sigma}\right)-\frac{1}{2}\right]\mathrm{d}v-\int_0^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\left[\frac{-2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_0^{v}\right]\mathrm{d}v$$

$$=\frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\sqrt{2}v)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}(\sqrt{2}v)-3\int_0^{+\infty}v\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}v+2\int_0^{+\infty}v\frac{4}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\Phi\left(\frac{v}{\sigma}\right)\mathrm{d}v+\frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{2v^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}v-\frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma+\frac{4}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot(-2\sigma^2)\int_0^{+\infty}\Phi\left(\frac{v}{\sigma}\right)\mathrm{d}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}+\frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}-\frac{3\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}-\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}+\frac{-8\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[\Phi\left(\frac{v}{\sigma}\right)e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}v\right]$$

$$=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}-\frac{4\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}+\frac{-8\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[0-\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\sqrt{2}v)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}(\sqrt{2}v)\right]$$

$$=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}-\frac{4\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}+\frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}+\frac{8\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}-\frac{4\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}+\frac{2\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}+\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}=\frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma\ 。$$

于是

$$E\left[\min\left(|X|,|Y|\right)\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma-\frac{1}{2}E\big||X|-|Y|\big|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma-\frac{1}{2}\cdot\frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}}\sigma\ 。$$

证法4：由于 $\min\left(|X|,|Y|\right)=\frac{|X|+|Y|-\big||X|-|Y|\big|}{2}$，故

$$E\left[\min\left(|X|,|Y|\right)\right]=E\left[\frac{|X|+|Y|-\big||X|-|Y|\big|}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[E|X|+E|Y|-E\big||X|-|Y|\big|\right]。$$

由证法 3 知 $E|X|=E|Y|=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma$，故 $E\left[\min\left(|X|,|Y|\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma-\frac{1}{2}\cdot E\big||X|-|Y|\big|$。若记 $U=|X|$，$V=|Y|$，则 U 与 V 独立同分布于 $p_U(u)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$，$u>0$。为求 $E\big||X|-|Y|\big|$，令 $Z=|X|-|Y|=U-V$，下面先求 Z 的密度函数 $p_Z(z)$。由变量变换法可知

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{U,V}(z+v,v)\mathrm{d}v=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(z+v)^2+v^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}v\ 。$$

当 $z>0$ 时，则 $-z<0$，再由 $z+v>0$ 即 $v>-z$ 和 $v>0$，知 $v>0$，故

$$p_Z(z)=\frac{4}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{2v^2+2zv}{2\sigma^2}}\mathrm{d}v=\frac{4}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(\sqrt{2}v+\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{4}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(\sqrt{2}v+\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}(\sqrt{2}v)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}\left(1-\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)\ 。$$

同理，当 $z\le0$ 时有 $-z\ge0$，再由 $z+v>0$ 即 $v>-z$ 和 $v>0$，知 $v>-z$，故

$$p_Z(z)=\frac{4}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\int_{-z}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{2v^2+2zv}{2\sigma^2}}\mathrm{d}v=\frac{4}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int_{-z}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(\sqrt{2}v+\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}(\sqrt{2}v)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}\left(1-\Phi\left(\frac{-z}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)\ 。$$

综上所述，可知 $Z=U-V$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\left(1-\Phi\left(\frac{|z|}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right),\quad z\in R\ 。$$

从而

$$E\big||X|-|Y|\big|=E|Z|=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|p_Z(z)\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{2}{\sqrt{\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}\left(1-\Phi\left(\frac{|z|}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2\cdot(-4\sigma^2)}{\sqrt{\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}\left(1-\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)\mathrm{d}\left(-\frac{z^2}{4\sigma^2}\right)=\frac{-8\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(1-\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)\mathrm{d}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}$$

$$=\frac{-8\sigma}{\sqrt{\pi}}\left[\left(1-\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)\cdot e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}\Bigg|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}\mathrm{d}\right.$$

$$\left(1-\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)\Bigg]$$

$$=\frac{-8\sigma}{\sqrt{\pi}}\left[-\frac{1}{2}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot 2\sigma^2}}\mathrm{d}z\right]=\frac{-8\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

$$\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z\right]$$

$$=\frac{-8\sigma}{\sqrt{\pi}}\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\right]=\frac{4\sigma}{\sqrt{\pi}}-\frac{2\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}=\frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma \text{。}$$

故

$$E\left[\min\left(|X|,|Y|\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma-\frac{1}{2}\cdot\frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}}\sigma \text{。}$$

类比地，将上述四种方法推广到绝对值最大值的数学期望问题中，得到如下结论[1]。

定理3：设二维随机变量(X,Y)服从二维正态分布$N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0)$，则

$$E\left[\max\left(|X|,|Y|\right)\right]=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} \text{。}$$

分析以上证法可知，对$\min(|X|,|Y|)$的不同处理方式得到不同的证法，通过讨论$|X|$与$|Y|$的大小关系得证法1；利用最小值的分布和定理1得证法2；利用分解式$\min(|X|,|Y|)=\frac{|X|+|Y|-\left||X|-|Y|\right|}{2}$得证法3和4。

证法1和2的计算过程中多次运用了分部积分法、换元积分法、二维正态分布的密度函数、标准正态分布函数$\Phi(u)$、标准正态分布的密度函数$\varphi(u)$，以及概率论中的重要积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u=\frac{1}{2},\int_0^{+\infty}2\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma,\Phi(0)=\frac{1}{2}$等；证法3则是先对绝对值进行分解，然后求得$(|X|,|Y|)$的联合密度函数，再得出$E\left||X|-|Y|\right|$，最后得出要证的结论；证法4中求出差的密度函数是计算的关键[2]。

关于多维随机变量函数的数学期望的计算，常常依据定理2进行，如证法1和3，但二重积分增大了计算的难度. 考虑到定积分相较于多重积分会更加容易，故在多维随机变量函数的分布求解难度不大的情况下，可将多维随机变量函数的数学期望计算问题转化为一维随机变量的数学期望问题，如证法2和4。

三、结语

概率论中一题多解的问题很多，教师如何抓住每一个问题，激发学生的学习积极性，培养学生的创造性和发散性思维，以及分析问题、解决问题的能力，值得一线教师不断地探索与研究，同时在探究过程中践行创新、举一反三等课程思政的理念。

参考文献：

[1]王瑞瑞,李金伟.负二项分布的数学期望和方差的一种求法[J].高师理科学刊,2019(12):55-57.

[2]王瑞瑞,李金伟,李彩娟.最大值与最小值的数学期望的几种求法[J].数学学习与研究,2021(12):141-142.

基金项目：河南省2021年度教师教育课程改革研究项目（2021JSJYYB124）；2021年度信阳市哲学社会科学规划项目（2021JY061）；河南省高等学校教改项目（2019SJGLX504）；2020年产学研合作协同育人项目（202002298013）；2020年度信阳学院校级课程思政项目，信阳学院校级教改项目（2020YJG018）；信阳学院校级科研项目（2021XJLYB009）。

作者简介：王瑞瑞（1983—），女，硕士，讲师，研究方向：统计诊断。

（作者单位：信阳学院数学与统计学院）