几种常见行列式类型及其计算方法的研究

文/李婵 杜晓玉

摘要：行列式作为线性代数课程中的一个重要概念，在之后矩阵的学习和方程组的求解中起着重要的作用。而行列式相关内容中最重要的部分莫过于行列式的计算。本文介绍了六种常见的行列式类型及其计算方法，针对不同的类型，选取相应的计算方法，可有效地帮助学生提高计算效率。

关键词：行列式计算；行列式类型；计算方法

一、行列式概述

线性代数是理工科各专业的一门公共基础课。以线性方程组的解为起源的行列式是线性代数的基本概念。行列式不仅是求解方程组的重要工具，在文献管理学、天文学、力学及密码学中也有重要应用。如在文献管理中，要进行目标搜索往往包含几百万个文件和成千的关键词，此时可以利用矩阵和行列式的稀疏性，节省计算机的存储空间和搜索时间。在天文学上，德国天文学家开普勒提出：每一行星沿各自的椭圆轨道环绕太阳，而太阳则处在椭圆的一个焦点上；该定律被称为开普勒第一定律。由此可知，任意行星的运行轨道一定是一个二次曲线，而该二次曲线中各变量的系数最后通过使用克莱姆法则求解线性方程组获得，而克莱姆法则中涉及的基本运算均为行列式计算。在电子工程和控制论中，学生经常使用拉普拉斯变换进行分析，将一个线性微分方程转变为一个线性方程组，然后利用克莱姆法则求解，这里同样涉及行列式的计算。因此，行列式理论及其计算无论是在专业中还是生活中都是十分重要的。一般低阶行列式（二阶和三阶）的计算，可以利用定义或对角线法则。部分较高阶的行列式可以按行或按列展开来进行降阶计算。但大多数高阶行列式是要根据行列式特点，利用行列式的性质来进行计算的。本文将归纳总结几种常见的高阶行列式类型，并给出对应的计算方法，以帮助学生提高行列式的计算效率[1]。

二、几种常见行列式类型及计算方法

第一，若一个阶行列式除了第一行，第一列和对角线元素外，其余元素均为零，这样的行列式称为

爪型行列式。将所有的非零元素用线连起来，形似小鸟的爪子，因此而得名。除此之外，常见的爪型行列式还有以下几种：，，，（连线外其他元素均为0）。接下来将以第一种情形为例，给出爪型行列式的计算方法。

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$，其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$。

可以看到上述行列式中除了第一行，第一列和主对角线外，其余元素均为零，是一个爪型行列式。对于这样的行列式，做法是利用对角线上的元素，将第一列或者第一行上的元素化为0，构造三角形行列式，再进行计算。

对于上式，从第二列开始，将每一列的 $-\frac{1}{a_i}, i=2,\cdots n$ 倍加到第一列，可得：$D_n=\begin{vmatrix} a_1-\frac{1}{a_2}-\cdots-\frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$

这样就得到一个上三角行列式，主对角线上元素的乘积即为行列式的值，所以 $D_n=\prod_{j=2}^{n}a_j(a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i})$。

其他类型的爪型行列式也是利用对角线上的元素，消除部分元素来构造三角形行列式。这里需要注意的是，不同类型的爪型行列式，或者在转化过程中消除的行、列不同，得到的三角形行列式会有所差别。可能是以主对角线为分割的上三角形行列式和下三角形行列式，也可能是以次对角线为分割的斜上三角形行列式和斜下三角形行列式。不管是哪种情况，只需按照三角形行列式的计算方法进行计算即可[2]。

不难发现，爪型行列式的计算难度并不大，但在接下来的研究中可以发现，有多个类型的高阶行列式在进行一系列的变形之后都会转化成爪型行列式，之后再计算，因此，熟练掌握爪型行列式的计算是十分重要的。

第二，若一个 n 阶行列式每行或者每列元素的和都相等，这样的行列式称为行和或者列和相等的行列式，采用连加法来进行计算。例如：$D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$，观察此行列式，可以看到该行列式每行或者每列元素之和均相等，这即是一个行和相等的行列式，又是一个列和相等的行列式。在这里，把它看作是行和相等的行列式来进行计算。从第二列开始，将所有元素都加到第一列，此时：$D_n=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$，把第一列的公因子提取出来，可得：

$$D_n=(a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+(n-1)b)(a-b)^{(n-1)}$$

这里可以把例题中的行列式看作是行和相等的行列式，也可以看作是列和相等的行列式。如果看作是列和相等的，从第二行开始将所有的行加到第一行，再提取公因子，也能够计算出结果。在具体的解题过程中，根据题干所给行列式的特征选择不同的加和方式即可。

第三，若一个 n 阶行列式以对角线为分割，上方元素均为a，下方元素均为b，这样的行列式称为两三角型行列式。这里由a和b之间的关系可分为a=b和a≠b两种情况。接下来针对这两种情况给出具体的计算方法。

（1）a=b，此时行列式可以写作：

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ a & x_2 & a & \cdots & a \\ a & a & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$，将第一行的-1倍加到其余各行上，此时：

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ a-x_1 & x_2-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x_1 & 0 & x_3-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}$$，可以看到行列式被转化为爪型，由爪型行列式的计算方法易得：

$$D_n=[\prod_{i=2}^{n}(x_i-a)]\times[x_1-a(a-x_1)\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x_i-a}]$$

（2）当a≠b时：

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$，此时采用拆项法来进行降阶：

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a+0 \\ b & x_2 & a & \cdots & a+0 \\ b & b & x_3 & \cdots & a+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x_n+b-b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & 0 \\ b & x_2 & a & \cdots & 0 \\ b & b & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x_n-b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & b \end{vmatrix}+(x_n-b)D_{n-1}$$

对于 $\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & b \end{vmatrix}$，将最后一列的-1倍分别加到其他各列，有：

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1-a & 0 & 0 & \cdots & a \\ b-a & x_2-a & 0 & \cdots & a \\ b-a & b-a & x_3-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$$

按最后一行展开有：$\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & b \end{vmatrix}=b\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-a)$

所以：$D_n=b\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-a)+(x_n-b)D_{n-1}$

又由行列式转置值不变性可得：$D_n=a\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-b)+(x_n-a)D_{n-1}$

联立方程组可得：$D_n=\frac{1}{a-b}\left[a\prod_{i=1}^{n}(x_i-b)-b\prod_{j=1}^{n}(x_j-a)\right]$

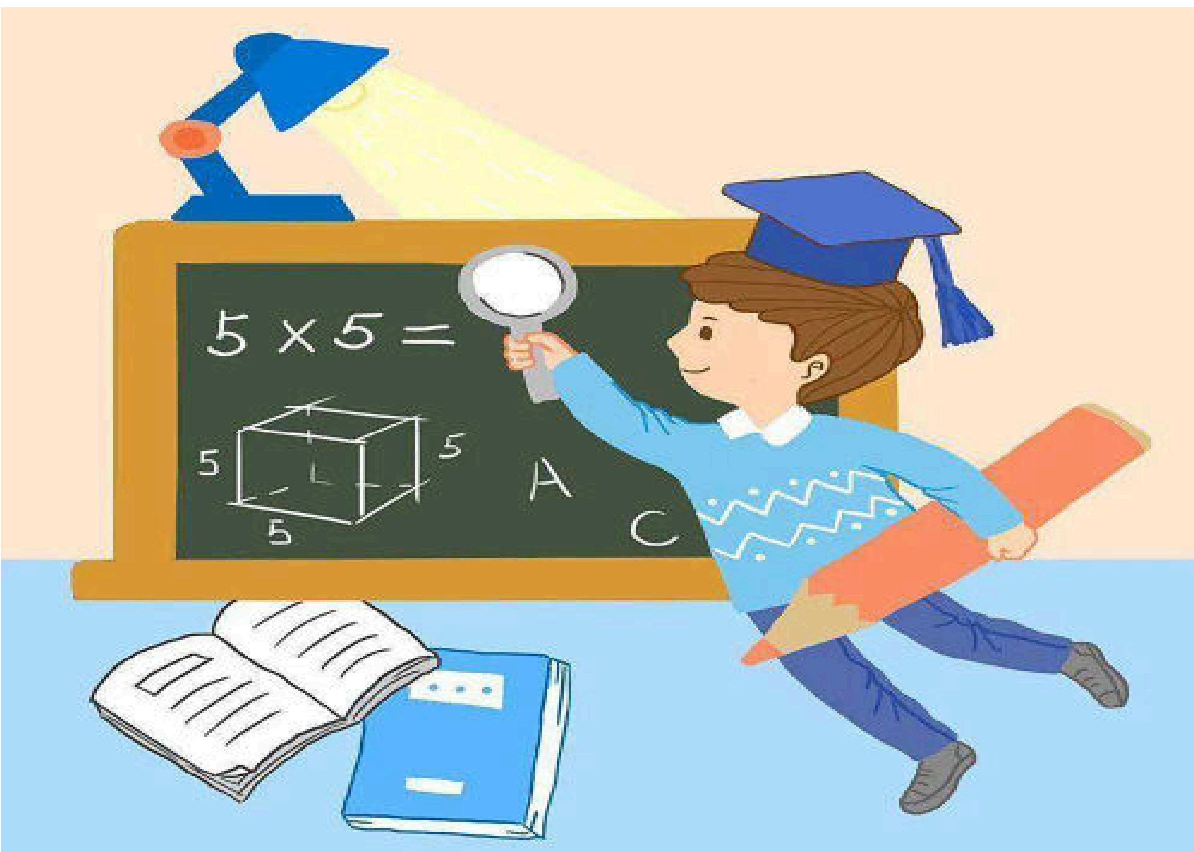
第四，对于除对角线外，其余行或列元素相同或存在公因子的行列式，可以考虑采用升阶法来进行计算。例如：

$D_n=\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix}$，该行列式除主对角线元素以外每列元素均相同，可以通过加边升阶法来进行计算。这里的升阶主要是用到了行列式按行按列展开的相关性质和内容：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix}$$

将第一行的-1倍加到其余各行可得：



$$D_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

此时行列式转化成爪型，利用爪型行列式的计算方法可得$D_n=1+\sum_{i=1}^{n}x_i$。

再来看一个除对角线以为，每一列元素具有相同公因子的例子：

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1^2 & x_2x_1 & x_3x_1 & \cdots & x_nx_1\\ x_1x_2 & 1+x_2^2 & x_3x_2 & \cdots & x_nx_2\\ x_1x_3 & x_2x_3 & 1+x_3^2 & \cdots & x_nx_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1x_n & x_2x_n & x_3x_n & \cdots & 1+x_n^2\end{vmatrix}$$

同样采用加边升阶法：

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ 0 & 1+x_1^2 & x_2x_1 & x_3x_1 & \cdots & x_nx_1\\ 0 & x_1x_2 & 1+x_2^2 & x_3x_2 & \cdots & x_nx_2\\ 0 & x_1x_3 & x_2x_3 & 1+x_3^2 & \cdots & x_nx_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_1x_n & x_2x_n & x_3x_n & \cdots & 1+x_nx_n^2\end{vmatrix}$$

将第一行的$-x_{i-1}$倍加到第i行，其中$i=2,\cdots,n+1$：

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ -x_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -x_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -x_3 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -x_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$，此时又转化为了爪型行列式，易得$D_n=1+\sum_{i=1}^{n}x_i^2$。

第五，若一个行列式相邻两行或列相差k倍，这个时候采用逐步做k倍差的方法，即可出现大量的0元素，方便计算。具体做法如下：

首先来看一个特殊例子：

$$D_n=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2\\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1\\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0\end{vmatrix}$$，可以看到这个行列式相邻两行之间相差1。从第一行开始，依次将后一行的-1倍加到前一行，此时行列式转化为：

$$D_n=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1\\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0\end{vmatrix}$$，接下来再将第一列加到其余各列，此时：

$$D_n=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & -2 & -2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -1 & -2 & -2 & \cdots & -2 & 0\\ n-1 & 2n-3 & 2n-4 & \cdots & n & n-1\end{vmatrix}$$，原行列式转化成了一个下三角行列式，易得：$D_n=(1-n)(-2)^{n-2}$。

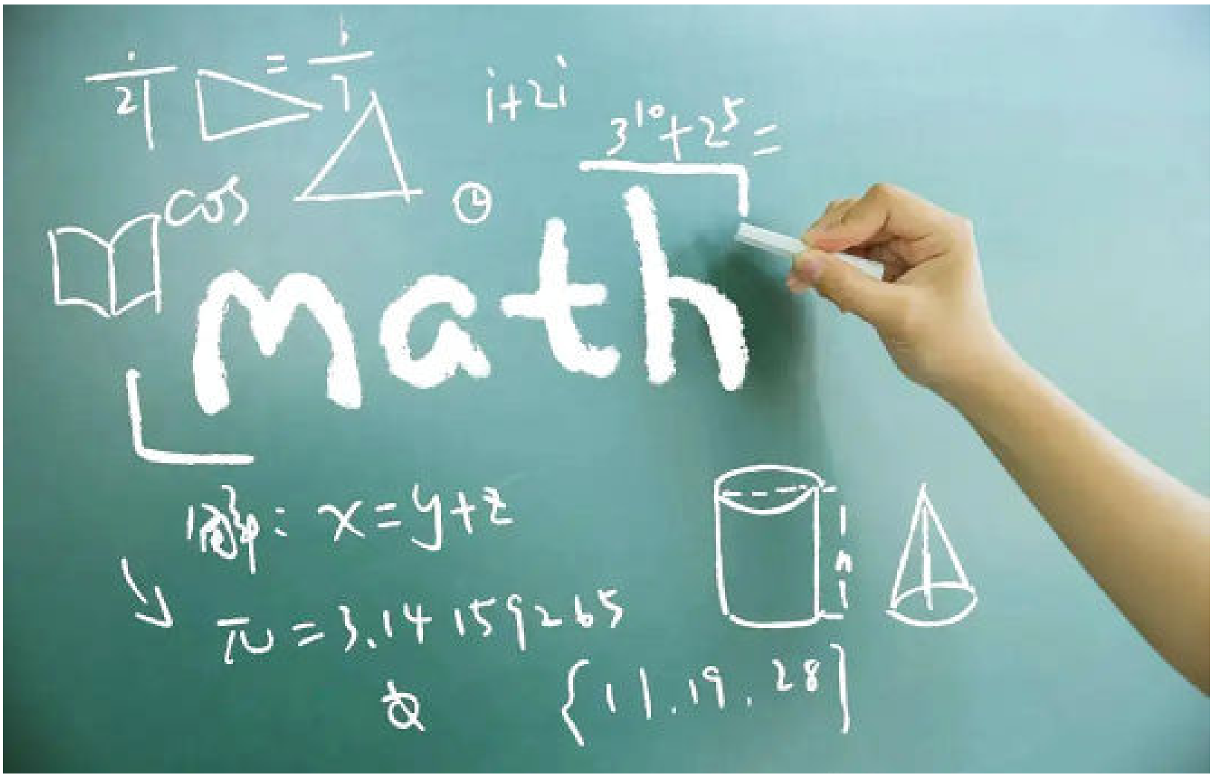
更一般的，来看一个相邻两行相差k倍的例子：

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1}\\ a^{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-3} & a^{n-2}\\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \cdots & a^{n-4} & a^{n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a^2 & a^3 & a^4 & \cdots & 1 & a\\ a & a^2 & a^3 & \cdots & a^{n-1} & 1\end{vmatrix}$$，此时$k=a$，即相邻两行相差a倍。从第一行开始，依次将后一行的$-a$倍加到前一行，可得：

$$D_n=\begin{vmatrix}1-a^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1-a^n & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-a^n & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a^n & 0\\ a & a^2 & a^3 & \cdots & a^{n-1} & 1\end{vmatrix}$$，这里仍然将原行列式转化成了一个下三角形行列式，易得：$D_n=(1-a^n)^{n-1}$。

第六，三对角型行列式是一种具有递推结构的行列式，将一个行列式按行或者按列展开，可以把这个行列式变换为与其具有相同结构的低阶行列式的线性组合，这样的行列式称为三对角型行列式。例如：

$$D_n=\begin{vmatrix}b & a & & & \\ c & b & a & & \\ & c & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & b & a\\ & & & c & b\end{vmatrix}$$，其中$ac\neq 0$。将该行列式按第一列展开有：$D_n=bD_{n-1}-acD_{n-2}(*)$，可以看到原行列式被表示为比它低阶的行列式的线性组合，且这两个低阶行列式与原行列式结构相同，因此这是一个三对角型行列式。其中$D_1=b$，$D_2=b^2-ac$。接下来将$(*)$式变形为



$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})$ $(**)$ 的形式。可以利用特征方程法来确定α 和β的值，从而明确上述的递推关系。之后再结合已知的D_1和D_2的值求出D_n。

在$(*)$式$(**)$和式中待定系数易得：$\alpha+\beta=b$，$\alpha\beta=ac$，为了解出α和β，做特征方程：$\lambda^2-b\lambda+ac=0$，其中α和β是二次方程的两个根。

记$\Delta=b^2-4ac$，下面对Δ进行分情况讨论（这里只讨论$\Delta\geq 0$的情况）。

（1）当$\Delta>0$时：

α和β为特征方程的两个不等实根，由于$ac\neq 0$，因此α,β均不为0，由$(*)$式有：$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})$和$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2})$，可得$\{D_n-\alpha D_{n-1}\}$是以$\beta$为公比的等比数列，由等比数列的性质有$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)$。同样的，容易得到$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^{n-2}(D_2-\beta D_1)$将上述两式联立方程组解出：$D_n=\frac{D_2-\beta D_1}{\alpha(\alpha-\beta)}\alpha^n+\frac{D_2-\alpha D_1}{\beta(\beta-\alpha)}\beta^n$。

（2）当$\Delta=0$时：

特征方程具有两个相等实根：$\alpha=\beta=\frac{b}{2}$，此时$D_n-\alpha D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})$，同样由等比数列的性质可得：$D_n-$ $=\alpha^{n-2}(D_2-\alpha D_1)$，递推可得：$D_n=(\frac{D_2-\alpha D_1}{\alpha^2}n+\frac{2\alpha D_1-D_2}{\alpha^2})\alpha^n$。

三对角行列式在计算的过程中难度不是很大，但是过程较为烦琐。上边的结果不建议学生记忆，在具体的题目中自行推导即可。当然一些该类型行列式也可以不借助特征方程，直接找出递推公式来进行求解，具体问题具体分析[3-4]。

三、结语

行列式的计算是线性代数中的一个重要知识点，其求解方式是多种多样的。本文主要介绍了六种较为常见且典型的高阶行列式及其对应的计算方法。在实际的计算中，选取合适的方法可以起到事半功倍的效果。但具体情况还要根据题目来进行分析，要充分挖掘行列式的特点，选择相应的方法，才能快速高效地求解。

参考文献：

[1]王晓春,张瑶,付吉丽.行列式的发展史及应用[J].课程教育研究,2017(30):205-206.

[2]吴传生.线性代数:第三版[M].北京:高等教育出版社,2015.

[3]同济大学数学系.线性代数:第六版[M].北京:高等教育出版社,2018:1-24.

[4]北京大学数学系.高等代数(第四版)[M].北京:高等教育出版社,2013.

作者简介：李婵（1992—），女，硕士，助教，研究方向：线性代数教学。

（作者单位：三门峡职业技术学院）